9.2 格林公式及其应用

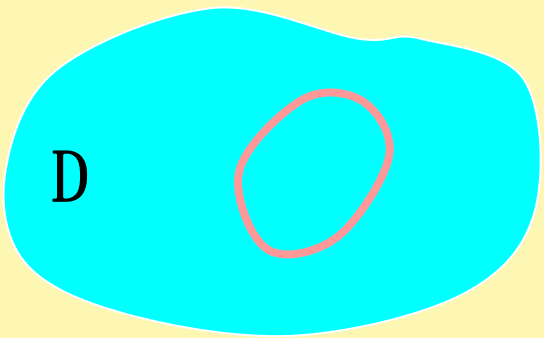
9.2.1 格林公式

9.2.2 平面上曲线积分与路径无关的条件

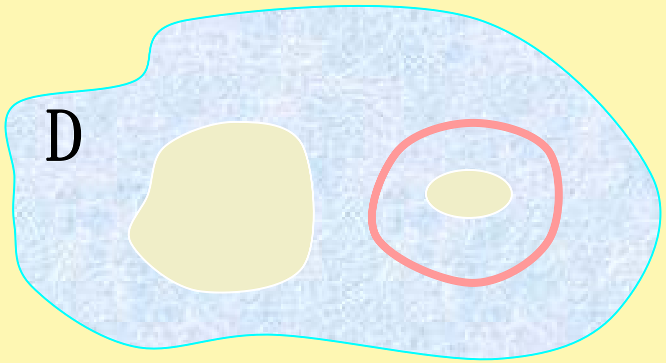
9.2.3 全微分方程

区域连通性的分类

设D为平面区域，如果D内任一闭曲线所围成的部分都属于D，则称D为平面单连通区域，否则称为复连通区域.

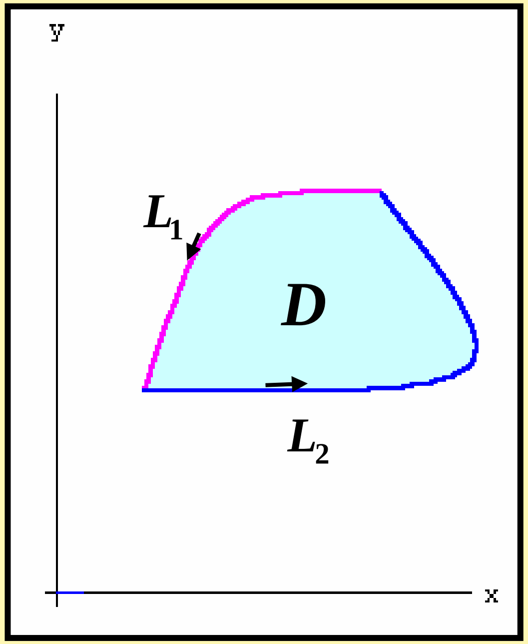


单连通区域

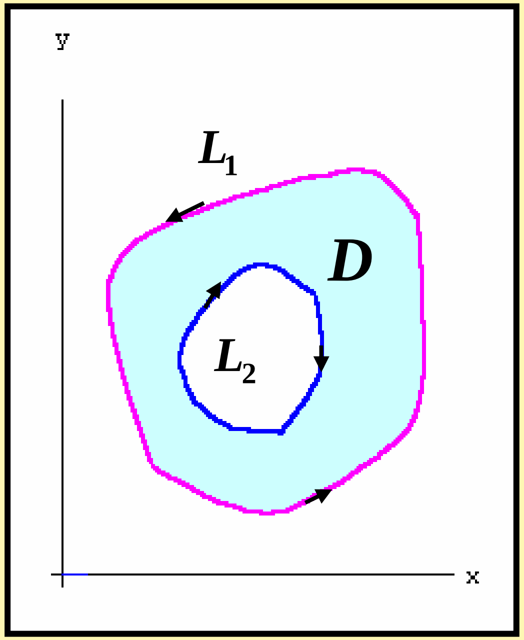


复连通区域

区域边界曲线L的正向



L由L_1与L_2连成



L由L_1与L_2组成

当观察者沿边界行走时，区域D总在他的左边。

9.2.1 格林公式

定理9.2.1 设有界闭区域D由分段光滑的曲线L围成, 函数$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy \qquad (1)$$

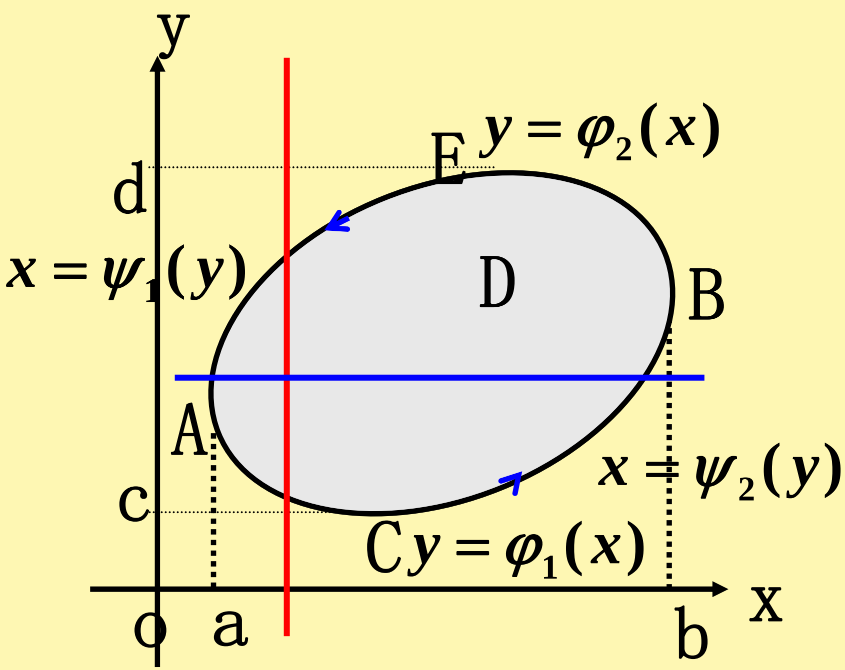
其中L是D的取正向的边界曲线,

公式(1)叫做格林公式.

区域D可以是单连通区域，也可以是复连通区域

证明 (1) D 为单连通区域

若区域D既是$X-$型又是$Y-$型，即平行于坐标轴的直线和L至多交于两点.



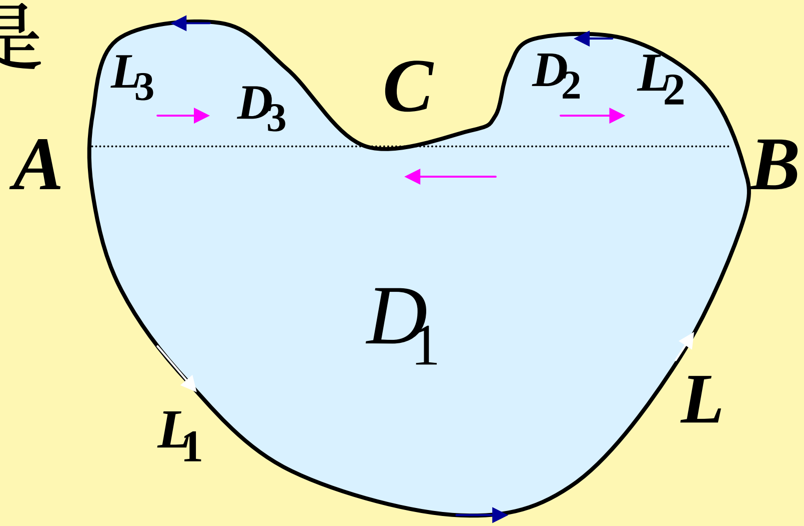
$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint_L Q(x,y)dy$$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \oint_L P(x,y)dx$$

两式相加得 $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$

(2) 区域D由按段光滑的闭曲线围成

将D分成三个既是X−型又是Y−型的区域D_1, D_2, D_3.

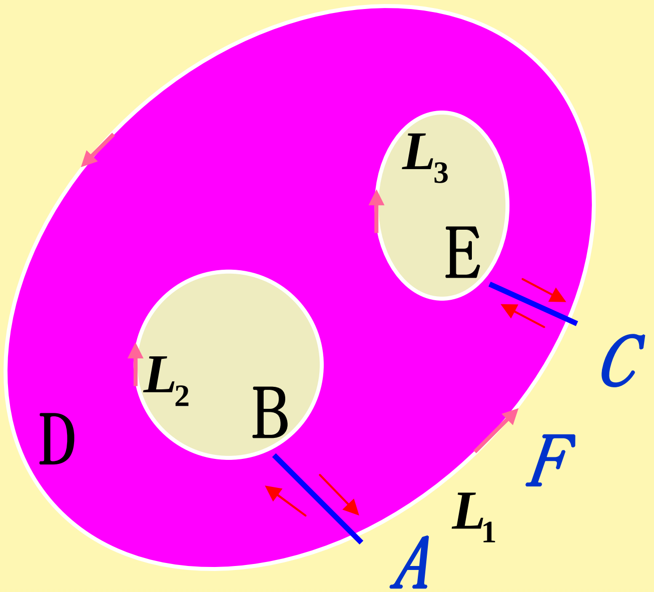


$$\because \int_{BA} = \int_{CA} + \int_{BC}$$

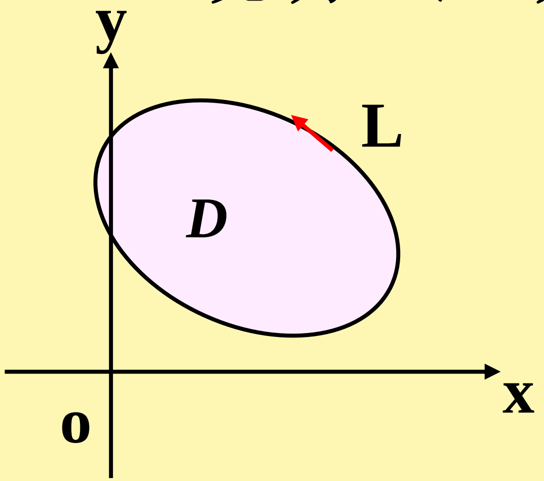
$$\therefore \int_{BA} + \int_{AC} + \int_{CB} = 0$$

(3) 若D为复连通区域。

添加直线段 AB, CE,



说明：区域D的边界曲线L取正向

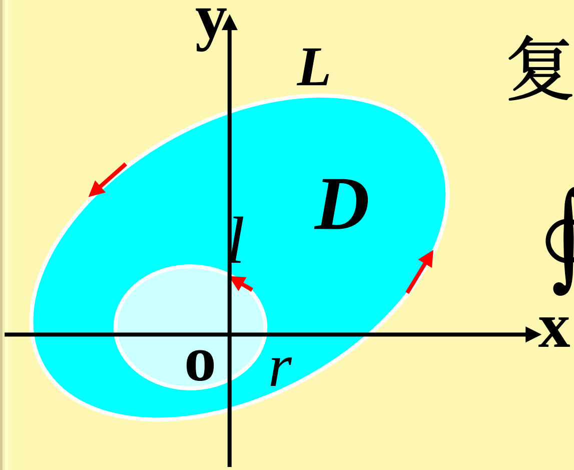


$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$

若L取负向，则L^-是正向

$$\oint_L Pdx+Qdy=-\oint_{L^-} Pdx+Qdy$$

$$=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$



复连通区域D的正向曲线：$L+l^{-}$

$$\oint_{L+l^{-}} Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$

推论9.2.1 若同向曲线L和l围成环形闭区域D，

P和Q在D上具有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,

则$\oint_L Pdx+Qdy=\oint_l Pdx+Qdy$

证：

$$\oint_{L+l^{-}}=0\Rightarrow\oint_L+\oint_{l^{-}}=0\Rightarrow\oint_L-\oint_l=0$$

格林公式的实质： 沟通了沿闭曲线的积分与二重积分之间的联系。

便于记忆形式

$$\iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

例1 计算

$$\oint_L \frac{(yx^3+e^y)dx+(xe^y+xy^3-8y)dy}{9x^2+4y^2}$$

其中$L: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 取顺时针方向.

解: 令 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$, θ 从 2π 变到0

$L:\ 9x^2+4y^2=36$

注: 应充分利用L的方程简化被积函数。

例1 计算

$$\oint_L \frac{(yx^3+e^y)dx+(xe^y+xy^3-8y)dy}{9x^2+4y^2} \quad L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

解：L：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 即$9x^2+4y^2=36$ 顺时针方向

$$\oint_L = \frac{1}{36}\oint_L (yx^3+e^y)dx+(xe^y+xy^3-8y)dy$$

$$=-\frac{1}{36}\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=-\frac{1}{36}\iint_D(e^y+y^3-x^3-e^y)dxdy$$

$$=-\frac{1}{36}\iint_D(y^3-x^3)dxdy \quad =0$$

由对称性：$\iint_D y^3dxdy=0=\iint_D x^3dxdy$

例2 计算 $\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$, 其中L 为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 O（0，0）到 A（4，0）.

解 为了使用格林公式，添加辅助线段 $\overline{AO}$, 它与L所围区域为D，则

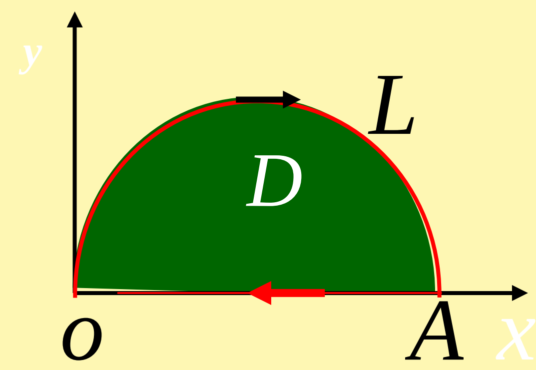
$$原式=\oint_{L+\overline{AO}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$-\int_{\overline{AO}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D(-4)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_4^0 x^2\,\mathrm{d}x$$

$$=8\pi+\frac{64}{3}$$

要先补线



NJUPT

例 3　计算$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中$L$为一条无重（chong）点, 分段光滑且不经过原点的连续闭曲线, L的方向为逆时针方向。

解　记L所围成的闭区域为D,

令$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$,　$Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$,

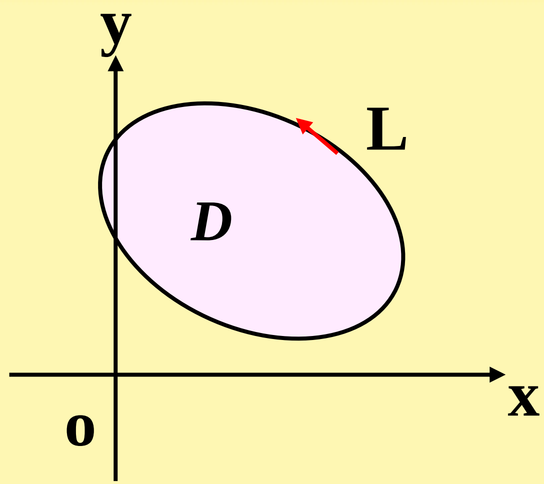
则当$x^2 + y^2 \neq 0$时, 有$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$。

格林公式使用条件:

函数$P(x, y), Q(x, y)$在D上具有一阶连续偏导数

此处函数P和Q在原点无定义

当$x^2+y^2\neq 0$时，有$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

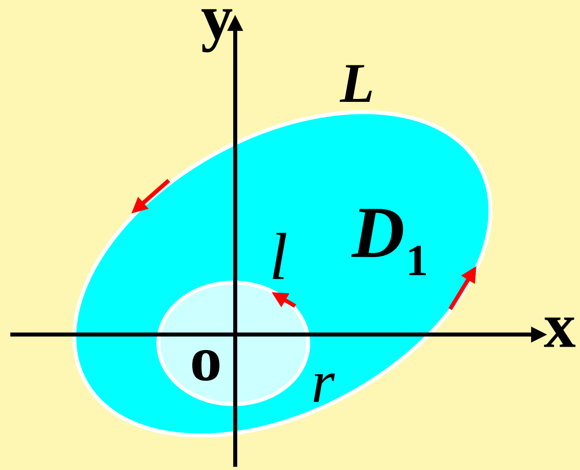


（1）当$(0,0)\notin D$时，

由格林公式知

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=0$$

（2）当$(0,0)\in D$时，

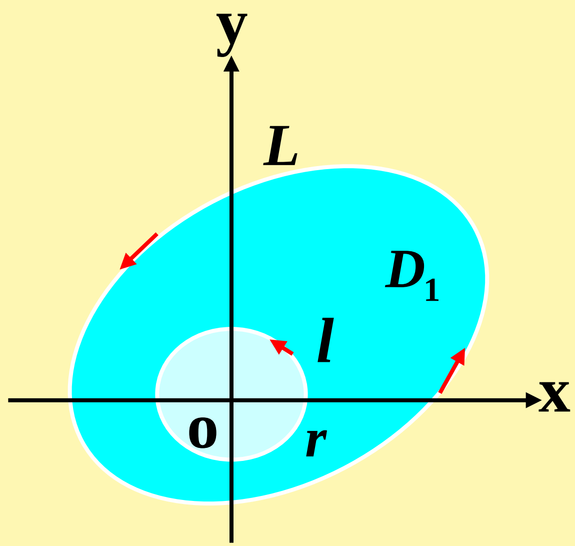


作位于D内曲线l 取逆时针方向

应用格林公式的推论，得

$$\oint_L=\oint_l$$

例 3　计算$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$，其中$L$为一条无重（chong）点，分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，L的方向为逆时针方向。



$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_l \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\oint_l xdy - ydx$$

$$= \frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi} r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta d\theta$$

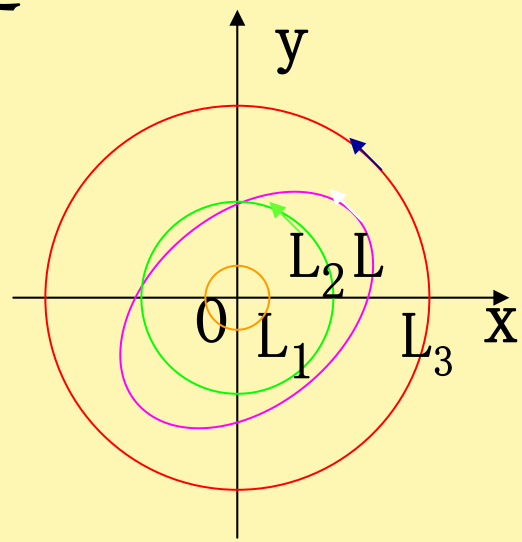
$$= 2\pi$$

$l:\ x^2 + y^2 = r^2$

（其中l的方向取逆时针方向）

(注意格林公式的条件）挖洞！

问： 此例中所作的辅助圆 l 是否一定要在D内（即r充分小）？



$$\oint_L = \oint_{L_1} = \oint_{L_2} = \oint_{L_3}$$

小结 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

L是D的边界（取正向），

（1）$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy$ 易于计算时

可应用格林公式计算曲线积分

若曲线积分容易计算，也可用来计算二重积分

（2）L不封闭时，采取“补线”的方法：

$$\int_L = \int_{L+l} - \int_l = \pm\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy - \int_l$$

要求右端的二重积分及曲线积分易于计算。

l 选用直线段、折线、圆、半圆、椭圆、抛物线等。

例如 计算$\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$，其中L 为上半圆周$y=\sqrt{4x-x^2}$从 O（0，0）到 A（4，0）.

（3）如果在D上P、Q一阶偏导连续，且处处有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \text{则} \oint_L = 0;$$

如 D 内除点 $M_0(x_0,y_0)$ 外均有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则

挖洞： $$\oint_L = \oint_l$$

其中 l 是包围点(x_0,y_0)的与 L 同向的光滑的简单闭曲线，特别地 l 是以 (x_0,y_0)为中心的圆、椭圆等

（半径或长短半轴大小不限，只要L和l所围区域内部没有“坏点”）

例4 计算 $I=\oint_C \dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}, C: x^2+y^2=1$，逆时针方向。

解 $P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}, Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$，当$(x,y)\neq(0,0)$时：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(4x^2+y^2)-x\cdot 8x}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{-4x^2+y^2}{(4x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(4x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{-4x^2+y^2}{(4x^2+y^2)^2},$$

除原点外处处有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

取 L: $4x^2+y^2=1$, 逆时针方向，则

函数$P(x,y),Q(x,y)$在L和C所围的区域内具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$$\oint_C \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_L xdy-ydx$$

函数$P'=-y,Q'=x$在L所围的区域D'内具有一阶连续偏导数,满足格林公式使用条件.

$$\oint_L xdy-ydx=2\iint_{D'}dxdy=\pi$$

注： 应充分利用曲线的方程简化被积函数, 代入方程后可利用格林公式计算。

（3） 计算平面面积

格林公式：$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$

取 $P = -y,\ Q = x$，得 $2\iint\limits_D dxdy = \oint_L xdy - ydx$

闭区域 D 的面积 $A = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx\,.$

取 $P = 0,\ Q = x$，得 $A = \oint_L xdy$

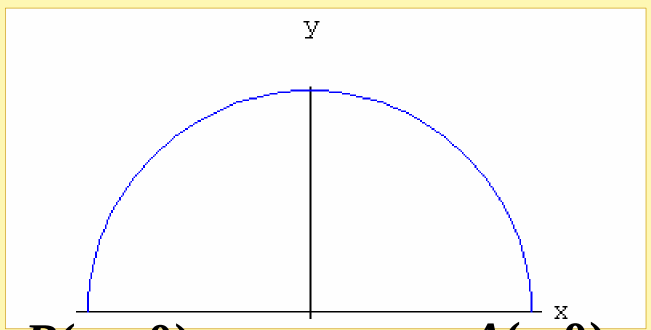
取 $P = -y,\ Q = 0$，得 $A = \oint_L -ydx$

8.2.2 平面上曲线积分与路径无关的条件

引例1 计算$\int_L y^2 dx$,其中L为

(1) 半径为 a、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周;

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.



引例2 计算 $\int_L 2xydx + x^2dy$,其中 L 为

(1) 抛物线 $y = x^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧 .

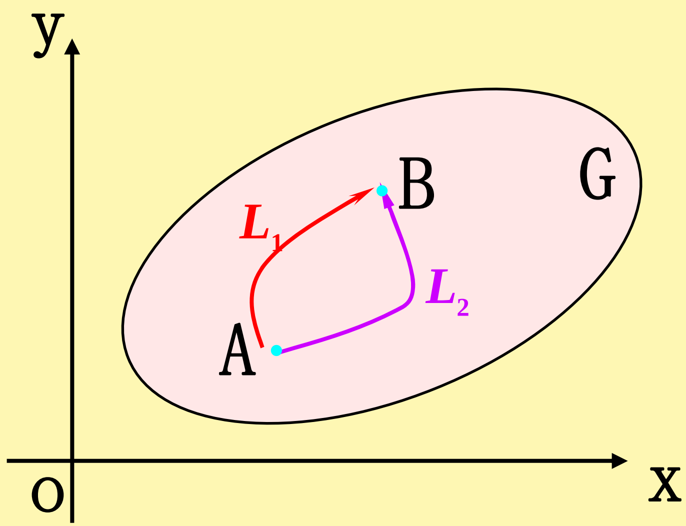
(2) 有向折线 OAB , 这里 O, A, B 依次是点 $(0,0)$ $(1,0), (1,1)$.

(3) 抛物线 $x = y^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧 .

如果在区域G内有

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy$$

$$= \int_{L_2} Pdx + Qdy$$



则称曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 G 内与路径无关,

否则称为与路径有关。

说明：积分与路径无关时，曲线积分可记为

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int_A^B Pdx + Qdy$$

平面上曲线积分与路径无关的等价条件

定理8.2.2 设 D是单连通域,函数$P(x,y),Q(x,y)$在D内具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿D中任意光滑闭曲线 L, 有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$。

(2) 对D中任一分段光滑曲线L, 曲线积分

$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$与路径无关, 只与起止点有关.

(3) $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$在 D内是某一函数 $u(x,y)$的全微分,

即 $\mathrm{d}u(x,y)=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

(4) 在 D内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$。

(2) 对 D 中任一分段光滑曲线 L， 曲线积分

$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，只与起止点有关.

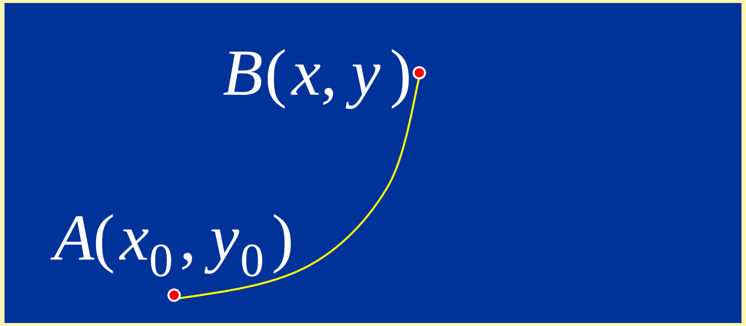
(3) $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分,

即 $\mathrm{d}u(x, y) = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

证明 (2) $\longrightarrow$ (3)

在D内取定点 $A(x_0, y_0)$ 和任一点 $B(x, y)$，因曲线积分与路径无关，构造函数

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$



NJUPT

说明：根据定理2, 若在某区域内 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 则

1）计算曲线积分时，可选择方便的积分路径;

2) 可用积分法求 $du=Pdx+Qdy$ 在域D内的原函数:

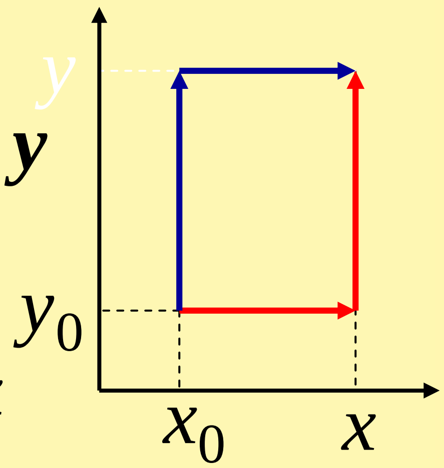
取定点 $(x_0,y_0)\in D$ 及动点 $(x,y)\in D$，则原函数为

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$$

或

$$u(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx$$



例5 验证 $xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分, 并求出这个函数.

证　设 $P=xy^2,\ Q=x^2y$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

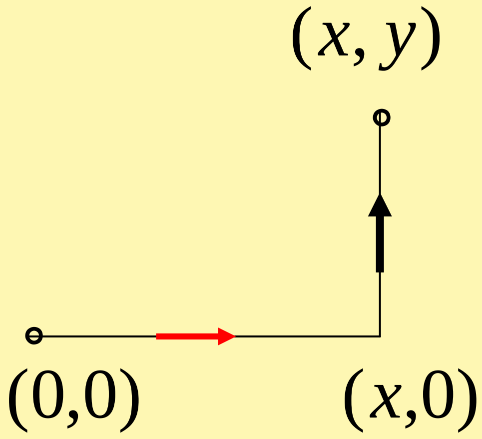
由定理2 可知，存在函数 u（x ， y），使

$$\mathrm{d}u=xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y$$

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x x\cdot 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}x^2y^2$$



9.2.3 全微分方程

1. 定义:

一个一阶微分方程写成 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的形式后，如果它的左端恰好是某个函数的全微分，即存在 $u(x,y)$ 使 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

则称 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ ①

为全微分方程.

通解为 $u(x,y)=C$

判别：P, Q 在某单连通域D内有连续一阶偏导数, 则

① 为全微分方程 $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $(x,y)\in D$

2. 解法：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 全微分方程

$$\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

解法一：应用曲线积分与路径无关.

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy$$

$$=\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx,$$

通解为 $u(x,y)=C$

解法二：直接凑全微分， 要熟悉常见的全微分

解法三：偏积分法

例6 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2+x^3+y}{1+x}$ 的通解.

解1 整理得 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{1+x}y=-x^2,$

A 常数变易法: 对应齐次方程的通解 $y=\dfrac{C}{1+x}.$

设 $y=\dfrac{C(x)}{1+x}.$ $C(x)=-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+C.$

B 公式法: $y=e^{-\int\frac{1}{1+x}dx}[\int -x^2e^{\int\frac{1}{1+x}dx}dx+C],$

通解为 $y+xy+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}=C.$

例6 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2+x^3+y}{1+x}$ 的通解.

解2 整理得 $(x^2+x^3+y)dx+(1+x)dy=0,$

$$\because \frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \therefore \text{是全微分方程}.$$

A 用曲线积分法:

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^2+x^3+y)dx+(1+x)dy$$

$$=\int_0^x(x^2+x^3)dx+\int_0^y(1+x)dy=y+xy+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$$

B 凑微分法: $dy+(xdy+ydx)+x^2dx+x^3dx=0,$

$$dy+d(xy)+d\frac{x^3}{3}+d\frac{x^4}{4}=0,\quad d\left(y+xy+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)=0.$$

$$\text{通解为 } y+xy+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}=C.$$

例6 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+x^3+y}{1+x}$ 的通解.

整理得 $du(x,y)=(x^2+x^3+y)dx+(1+x)dy$

C 偏积分法: $\because \frac{\partial u}{\partial x}=x^2+x^3+y,$

$$\therefore \int (x^2+x^3+y)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+xy+C(y),$$

又 $\frac{\partial u}{\partial y}=1+x,\quad \therefore \frac{\partial u}{\partial y}=x+C'(y)=1+x,$

$C'(y)=1,\ C(y)=y,\quad u(x,y)=y+xy+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$

原方程的通解为 $y+xy+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}=C.$

内容小结

1　格林公式 $\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

2　等价条件

设P, Q在单连通域D内具有一阶连续偏导数，则有

$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

$\Longleftrightarrow$ 对 D 内任意闭曲线L有 $\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$